Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2026

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 5

Indiqueu l'opció triada:

Exercici 4: Opció A ☐ Opció B ☐

Espai per a la correcció

Qualificació	
Exercici 1	
Exercici 2	
Exercici 3	
Exercici 4	
Suma de notes parcials	
Qualificació final	

Espai per a la revisió

Comprovació	2a correcció

Etiqueta de qualificació

Etiqueta de correcció

Etiqueta de l'estudiant

Ubicació del tribunal .....

Número del tribunal .....

L'examen consta de QUATRE exercicis obligatoris. Cada exercici val 2,5 punts. Feu els exercicis 1, 2 i 3 responent a TOTES les qüestions que s'hi plantegen. A l'exercici 4, trieu UNA de les dues opcions (A o B) proposades i indiqueu-la a la portada.

En totes les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què. Cal que la redacció de la resposta es faci de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc del final del quadern per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de l'exercici corresponent.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Exercici 1

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 1	

Considereu la paràbola $y = f(x)$, amb $f(x) = -x^2 + 5x$, i la hipèrbola $y = g(x)$, amb $g(x) = 8 - \dfrac{8}{x+1}$.

1.1. En quants punts es tallen les gràfiques d'aquestes dues funcions? Calculeu-los tots.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 1.1	

1.2. Calculeu l'àrea de la regió situada entre les dues corbes des de $x = 1$ fins a $x = 3$.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.2	

1.3. Comproveu que $f(x)$ té les arrels als punts d'abscissa $x = 0$ i $x = 5$, i que l'ordenada del vèrtex de la paràbola $y = f(x)$ és $y = 6{,}25$. Justifiqueu que $y = f(x)$ és l'única paràbola que existeix amb aquestes dues propietats.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 1.3	

Exercici 2
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 2	

Considereu les matrius $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on k és un nombre real qualsevol.

2.1. Calculeu els valors de k per als quals $\boldsymbol{MN}$ és invertible.
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 2.1	

2.2. Calculeu els valors de k per als quals $\boldsymbol{NM}$ és invertible.
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 2.2	

2.3. Estudieu per a quins valors reals de m, n i k el sistema $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ és compatible indeterminat.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.3	

Exercici 3
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 3	

En una ciutat s'ha estudiat la relació entre els hàbits de lectura i la pràctica d'esport en l'alumnat de batxillerat. Per a fer-ho, s'han formulat les dues preguntes següents a l'alumnat d'aquesta etapa educativa: «Llegeixes com a mínim dos llibres al mes?» i «Practiques algun esport almenys quatre hores a la setmana?»

Dels resultats de l'enquesta, es desprèn que el 60 % llegeixen com a mínim dos llibres al mes, dels quals el 70 % practiquen algun esport un mínim de quatre hores a la setmana. També s'observa que, d'entre els que no llegeixen un mínim de dos llibres al mes, el 50 % fan menys de quatre hores setmanals d'esport.

Si escollim a l'atzar un alumne/a de batxillerat d'aquesta ciutat:

3.1. Quina és la probabilitat que faci esport almenys quatre hores setmanals?
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.1	

3.2. Si sabem que aquest alumne/a fa esport menys de quatre hores setmanals, quina probabilitat hi ha que llegeixi almenys dos llibres al mes?
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.2	

L'Alba és una estudiant de batxillerat que ha anat anotant durant tot el curs quantes hores dedicava a la setmana a llegir i quantes a fer esport. Per a cada setmana té apuntat un nombre real x que correspon a la quantitat d'hores de lectura i que oscil·la entre 1 i 6, i un nombre real y que correspon a la quantitat d'hores de pràctica esportiva. Ha observat que la relació $y = 7 - x + \ln(2x - 1)$ s'ajusta força bé a les dades que ha anotat.

3.3. Calculeu, segons aquest model, quin és el màxim i el mínim d'hores per setmana que l'Alba ha dedicat a practicar esport.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 3.3	

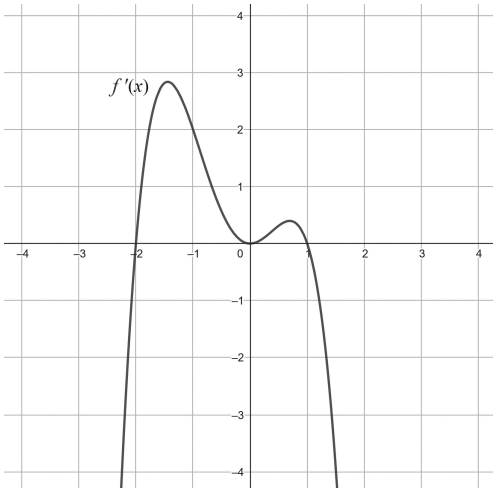
Exercici 4
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ A

D'una funció $f(x)$, sabem que passa pel punt $(-1, -1)$ i que la gràfica de la seva funció derivada és la següent:



4.1. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt $(-1, -1)$.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.1	

4.2. Estudieu si $f(x)$ té punts crítics (punts on $f'(x) = 0$) i, en cas que en tingui, determineu-ne les abscisses i classifiqueu-los segons si són màxims, mínims o punts d'inflexió de $f(x)$.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.2	

4.3. Sabent, a més, que $f(0) = -0{,}2$, calculeu l'àrea entre la gràfica de $f'(x)$ i l'eix de les abscisses, des de $x = -1$ fins a $x = 0$.
[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 4.3	

OPCIÓ B

En una indústria es fan servir braços robòtics amb sensors per a mesurar amb precisió determinades peces metàl·liques i comprovar si tenen irregularitats. Les peces es col·loquen sobre la superfície determinada pel pla π: $(x, y, z) = (6, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 0, 1)$ i, per damunt seu, un braç robòtic desplaça un sensor des del punt $A = (1, 2, 3)$ fins al punt $B = (5, 3, 7)$ en línia recta (les unitats dels tres eixos de coordenades estan expressades en centímetres).

4.1. Quina distància ha recorregut el sensor?
[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1	

4.2. En acabar el moviment, a quina distància de la superfície es troba el sensor?
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.2	

4.3. Si el sensor seguís movent-se en la mateixa línia recta i en el mateix sentit, en quin punt xocaria amb la superfície?
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.3	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici.]

Comprovació i 2a correcció:

3a correcció:

Etiqueta de l'estudiant

IEC
Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés.

SÈRIE 5

Exercici 1

1.1. Per trobar els punts de tall entre paràbola i hipèrbola, resolem l'equació $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$:

$$-x^2 + 5x = 8 - \frac{8}{x+1}$$

$$(x+1)(-x^2+5x) = 8x + 8 - 8$$

$$-x^3 + 4x^2 + 5x = 8x$$

$$x(-x^2 + 4x - 3) = 0.$$

Les solucions són $x = 0$ i $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$. Per tant, es tallen exactament en tres punts. Calculant les seves imatges, es tracta de $(0, f(0)) = (0,0)$, $(1, f(1)) = (1,4)$ i $\big(3, f(3)\big) = (3,6)$.

1.2. Com que no hi ha més punts de tall que els tres calculats a l'apartat anterior, entre 1 i 3 les gràfiques no es toquen (de fet, $\boldsymbol{f}$ està per damunt de $\boldsymbol{g}$) i l'àrea demanada és

$$A = \int_1^3 (f(x) - g(x))\, dx = \int_1^3 \left(-x^2 + 5x - 8 + \frac{8}{x+1}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 8x + 8\ln(x+1)\right]_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{27}{3} + \frac{45}{2} - 24 + 8\ln(4)\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 8 + 8\ln(2)\right) = -\frac{26}{3} + 4 + 8\ln(2)$$

$$= 0.878\ldots\ u^2.$$

1.3. Efectivament $f(x)$ té arrels als punts d'abscisses 0 i 5, $f(0) = -0^2 + 0 = 0$ i $f(5) = -5^2 + 25 = 0$. La paràbola $y = f(x)$ té el vèrtex situat al punt $-2x + 5 = 0 \longrightarrow x = \frac{5}{2}$, que efectivament té per imatge $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} = \frac{25}{4} = 6{,}25$.

A més, $y = f(x)$ és l'única paràbola amb aquestes dues propietats ja que qualsevol que les compleixi haurà de ser de la forma $f(x) = ax(x-5)$; i com que el vèrtex ha d'estar al punt mig de les dues arrels $x = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$ i ha de tenir imatge $6{,}25$, tindrem

$$6{,}25 = f\left(\frac{5}{2}\right) = a\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} - 5\right) = a \cdot \left(-\frac{25}{4}\right) = -6{,}25\, a.$$

Per tant $a = -1$, i l'única paràbola és $f(x) = -1 \cdot x(x-5) = -x^2 + 5x$.

Criteris de correcció: (1.1.) Compteu 0,5 per plantejar i desenvolupar l'equació, i 0,25 pels punts de tall. **(1.2.)** Compteu 0,25 pel planteig correcte de l'àrea, 0,5 pel càlcul de la primitiva, i 0,25 pel resultat final. Penalitzeu 0,25 si resten les funcions al revés i/o donen com a bona una àrea negativa. **(1.3.)** Compteu 0,25 per la comprovació de les dues propietats demanades i 0,5 per la justificació que és l'única paràbola que les compleix.

Exercici 2

2.1. El producte $\boldsymbol{MN}$ i el seu determinant donen

$$MN = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+3k-3 & 3 \\ 3k-3-k+1 & k-1-2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 3k+6 & 3 \\ 2k-2 & k-3 \end{vmatrix} = 3k^2+6k-9k-18-6k+6 = 3(k^2-3k-4),$$

que és zero per als valors $k = \frac{3\pm\sqrt{9-4(-4)}}{2} = \frac{3\pm5}{2} = 4, -1$. Per tant, la matriu MN és invertible per a tot k excepte $k = 4$ i $k = -1$.

2.2. El producte $\boldsymbol{NM}$ dona

$$NM = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 3k-3 & 3k-3 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Com que la primera columna és igual a la segona menys k vegades la tercera, el determinant és sempre zero i la matriu NM no és invertible per cap valor de k. Alternativament, es pot calcular el determinant i veiem que dóna zero independentment de k:

$$\begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 3k-3 & 3k-3 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2(3k-3)\begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(3k-3)(-k-8+1+k-1+8) = 0.$$

2.3. En forma matricial es tracta del sistema d'equacions

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & m \\ k-1 & -1 & -1 & n \end{array}\right).$$

Com que $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, el rang de la matriu de coeficients és 2 i el de l'ampliada també, independentment dels tres paràmetres. I com que hi ha 3 incògnites, aquest sistema és compatible indeterminat per qualssevol valors de m, de n i de k.

Criteris de correcció: (2.1.) Compteu 0,25 pel producte matricial, 0,25 pel càlcul del determinant, i 0,25 per donar la resposta correcta. **(2.2.)** Compteu 0,25 pel producte matricial, 0,25 per argumentar que el determinant és sempre zero, i 0,25 per deduir la resposta correcta. **(2.3.)** Compteu 0,25 per interpretar el sistema d'equacions demanat, 0,5 per calcular els rangs, i 0,25 per donar la resposta correcta.

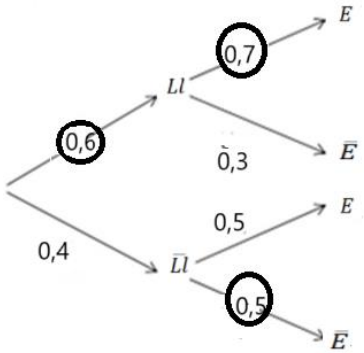
Exercici 3

3.1. Considerem els successos aleatoris següents:

Ll = ``*llegir almenys dos llibres al mes*",

E = ``*fer un mínim de quatre hores setmanals d'esport*".

Les dades del problema ens diuen que $P(Ll) = 0{,}6$, $P(E|Ll) = 0{,}7$, i $P(\bar{E}|\overline{Ll}) = 0{,}5$. Podem visualitzar-les en el diagrama d'arbre adjunt:



Pel teorema de la probabilitat total:

$$P(E) = P(Ll) \cdot P(E|Ll) + P(\overline{LL}) \cdot P(E|\overline{LL}) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 =$$

$$= 0{,}42 + 0{,}20 = 0{,}62.$$

3.2. Per la fórmula de Bayes:

$$P(LL|\bar{E}) = \frac{P(LL \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{P(\bar{E}|LL) \cdot P(LL)}{1 - P(E)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6}{1 - 0{,}62} = 0{,}47 \ldots$$

3.3. Cal trobar els valors màxim i mínim absoluts de la funció $f(x) = 7 - x + \ln(2x - 1)$ en l'interval $[1, 6]$. La derivada de $f(x)$ és $f'(x) = -1 + \frac{2}{2x-1}$, que s'anul·la només per $x = \frac{3}{2}$. Aquest punt crític es correspon a un màxim local, ja que la funció (a la vista del signe de la derivada) creix per $x < \frac{3}{2}$ i decreix per $x > \frac{3}{2}$. Com que $f(1) = 7 - 1 + \ln 1 = 6$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 7 - \frac{3}{2} + \ln 2 \approx 6,19$, i $f(6) = 7 - 6 + \ln 11 \approx 3,4$, deduïm que el màxim i mínim absoluts de la funció a l'interval $[1, 6]$ són als punts $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 6,19$ i $f(6) \approx 3,4$, respectivament. Per tant, segons aquest model, l'Alba ha practicat entre un mínim de $3,4$ i un màxim de $6,19$ hores per setmana d'esport.

Criteris de correcció: (3.1.) Compteu 0,25 per plantejar la llei de la probabilitat total, 0,25 per idenficar les dades del problema, i 0,25 pel càlcul. **(3.2.)** Compteu 0,25 per plantejar la fórmula de Bayes (o la fórmula de la probabilitat condicionada) i 0,5 pel càlcul. **(3.3.)** Compteu 0,25 per la derivada i per detectar que $3/2$ és l'únic punt crític, 0,25 per les zones de creixement i decreixement, 0,25 per argumentar el màxim global, i 0,25 per argumentar el mínim global.

Exercici 4

OPCIÓ A.

4.1. Usarem l'expressió de la recta punt-pendent, $\boldsymbol{y - f(x_0) = m(x - x_0)}$. Com que la recta buscada ha de passar pel punt $\boldsymbol{x_0 = -1}$, $\boldsymbol{f(x_0) = -1}$, i ha de tenir pendent $\boldsymbol{f'(x_0) = f'(-1) = 2}$ (tal com es veu al gràfic), l'equació de la recta tangent a la funció $\boldsymbol{f(x)}$ en el punt $\boldsymbol{x_0 = -1}$ serà

$$y - (-1) = 2 \cdot \big(x - (-1)\big) \longrightarrow y + 1 = 2 \cdot (x + 1) \longrightarrow y = 2x + 1.$$

4.2. Els punts crítics de $\boldsymbol{f(x)}$ són aquells que satisfan $\boldsymbol{f'(x) = 0}$. Del gràfic es veu clarament que són els punts $\boldsymbol{x = -2}$, $\boldsymbol{x = 0}$, i $\boldsymbol{x = 1}$: aquestes abscisses són possibles extrems relatius de la funció $\boldsymbol{f(x)}$.

Com que $f'(x)$ és creixent en $x = -2$, la seva derivada en aquest punt serà positiva, $f''(-2) > 0$, i això vol dir que $x = -2$ és un mínim local de $f(x)$.

Anàlogament, com que $f'(x)$ és positiva immediatament abans de $x = 1$, i negativa immediatament després, la funció $f(x)$ és creixent abans de $x = 1$ i decreixent després; per tant $x = 1$ és un màxim local de $f(x)$.

El punt $x = 0$ és diferent. Tant abans com després $f'(x)$ és positiva per tant, $f(x)$ és creixent en el punt $x = 0$. Però a més, $f'(x)$ és decreixent abans de $x = 0$ i per tant la seva derivada (és a dir, $f''(x)$) és negativa, mentre que és creixent després de $x = 0$ i per tant $f''(x)$ és positiva. Això vol dir que la funció $f(x)$ és convexa abans de $x = 0$ i còncava després. Per tant, el punt $x = 0$ és un punt d'inflexió de $f(x)$.

4.3. Com que $\boldsymbol{f(x)}$ és una primitiva de $\boldsymbol{f'(x)}$, l'àrea que ens demanen és fàcil de calcular usant la regla de Barrow (i usant les dades $\boldsymbol{f(0) = -0,2}$ i $\boldsymbol{f(-1) = -1}$):

$$A = \int_{-1}^{0} f'(x)\,dx = [f(x)]_{-1}^{0} = f(0) - f(-1) = -0{,}2 - (-1) = 0{,}8\,u^2.$$

Criteris de correcció: (4.1.) Compteu 0,5 per determinar el pendent de la recta tangent a partir del gràfic, i 0,5 per l'equació de la recta. **(4.2.)** Compteu 0,25 per la llista de punts crítics, 0,25 per deduir que $x = -2$ és un mínim, 0,25 per deduir que $x = 1$ és un màxim, i 0,25 per deduir que $x = 0$ és un punt d'inflexió. **(4.3.)** Compteu 0,25 per reconèixer que $f(x)$ és una primitiva de $f'(x)$, i 0,25 pel càlcul de l'àrea.

OPCIÓ B.

4.1. Calculem la distància entre els punts $\boldsymbol{A(1,2,3)}$ i $\boldsymbol{B(5,3,7)}$:

$$d(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \|(4,1,4)\| = \sqrt{4^2+1^2+4^2} = \sqrt{33} \approx 5{,}74\ cm.$$

Per tant, el sensor ha recorregut 5,74 cm.

4.2. Hem de calcular la distància del punt $\boldsymbol{B}$ al pla $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{d(B,\pi)}$. Per fer-ho, necessitem l'equació general del pla:

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x-6-(y-1)=0 \iff x-y-5=0.$$

Aplicant la fórmula de la distància punt-pla, obtenim

$$d(B,\pi) = \frac{|1\cdot 5 - 1\cdot 3 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}12\ cm.$$

4.3. Per trobar el punt de xoc, hem de buscar el punt de tall del pla $\boldsymbol{\pi}$ amb la recta que passa per $\boldsymbol{A}$ i per $\boldsymbol{B}$. Primer explicitem l'equació d'aquesta recta:

$$(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(4,1,4) = (1+4\lambda, 2+\lambda, 3+4\lambda),$$

i ara busquem el punt en comú imposant l'equació del pla:

$$1+4\lambda-(2+\lambda)-5=0,$$

d'on $3\lambda - 6 = 0$ i $\lambda = 2$. Això vol dir que el punt de xoc és

$$(x,y,z) = (1,2,3) + 2(4,1,4) = (9,4,11).$$

Criteris de correcció: (4.1.) Compteu 0,5 pel càlcul de la distància entre els dos punts. **(4.2.)** Compteu 0,5 per trobar l'equació general del pla i 0,5 pel càlcul de la distància. **(4.3.)** Compteu 0,5 per l'equació de la recta i 0,5 pel càlcul del punt intersecció.