Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2026

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 1

Indiqueu l'opció triada:

Exercici 4: Opció A ☐ Opció B ☐

Espai per a la correcció

Qualificació	
Exercici 1	
Exercici 2	
Exercici 3	
Exercici 4	
Suma de notes parcials	
Qualificació final	

Espai per a la revisió

Comprovació	2a correcció

Etiqueta de qualificació

Etiqueta de correcció

Etiqueta de l'estudiant

Ubicació del tribunal .....

Número del tribunal .....

L'examen consta de QUATRE exercicis obligatoris. Cada exercici val 2,5 punts. Feu els exercicis 1, 2 i 3 responent a TOTES les qüestions que s'hi plantegen. A l'exercici 4, trieu UNA de les dues opcions (A o B) proposades i indiqueu-la a la portada.

En totes les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què. Cal que la redacció de la resposta es faci de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc del final del quadern per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de l'exercici corresponent.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Exercici 1

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 1	

Considereu la funció definida a trossos següent:

$$f(x)=\begin{cases} 5e^{2x} & x\le 0 \\ (x+m)^2+1 & 0<x<2 \\ 1 & 2\le x \end{cases},$$

on m és un paràmetre real.

1.1. Determineu els valors de m que fan que la funció $f(x)$ sigui contínua en tot el seu domini. Justifiqueu la resposta.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.1	

1.2. Feu un esbós de la gràfica de $y = f(x)$ per al cas $m = -2$, i calculeu l'àrea delimitada per aquesta gràfica, l'eix OX i les rectes $x = -1$ i $x = 3$.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.2	

1.3. Per a $m = -2$, trobeu un punt on la recta tangent a $y = f(x)$ sigui paral·lela a $y = -2x$. Calculeu l'equació d'aquesta recta tangent.

[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 1.3	

Exercici 2
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 2	

Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que està format per tres plans a l'espai i depèn del paràmetre real m:

$$\left.\begin{array}{l} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\}.$$

2.1. Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.1	

2.2. Interpreteu geomètricament aquest sistema per a tots els valors del paràmetre m i resoleu-lo, si és possible, per al cas $m = 1$.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.2	

2.3. Per a $m = 1$, és possible afegir una quarta equació de manera que el sistema resultant sigui compatible determinat i tingui com a solució $(x, y, z) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$? Raoneu la resposta.

[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 2.3	

Exercici 3

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 3	

L'Ajuntament de Canet de Mar ha aconseguit 24 entrades gratuïtes per a un concert d'un grup de rock català, i ha decidit sortejar-les entre els veïns interessats a assistir-hi. Tots els veïns del poble seguidors d'aquest grup s'apunten al sorteig, i només al 16 % els toca una entrada. De la resta de seguidors del grup, sis setenes parts intenten comprar una entrada per la web, on la probabilitat d'aconseguir-ne és del 25 %.

3.1. Quantes persones d'aquest municipi tenen entrada per al concert?

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.1	

3.2. Si escollim a l'atzar un veí de Canet seguidor d'aquest grup de rock i no té entrada per al concert, quina és la probabilitat que hagués intentat aconseguir-la via web?

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.2	

3.3. El dia del concert, l'equip de so mesura el nivell de decibels generat pels crits entusiastes del públic durant els 5 minuts de durada de la cançó més famosa del grup; es pot aproximar per la funció següent:

$$S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30t + 90, \qquad t \in [0, 5],$$

on t és el temps en minuts i $S(t)$ els decibels. Quan se superen els 100 decibels es considera que el públic està molt entregat i s'activen automàticament uns efectes lumínics especials. S'activaran en algun moment durant aquests cinc minuts? Si la resposta és afirmativa, calculeu en quin minut s'activen, aproximat a les dècimes.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 3.3	

Exercici 4
[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ A

L'alcalde d'un poble de Catalunya encarrega a l'arquitecte municipal el disseny d'un parc infantil que es construirà en un terreny públic. Per a complir la normativa vigent, en el parc hi ha d'haver dos espais ben delimitats: un per a una boca de reg —el qual, segons l'arquitecte, ha de tenir forma circular—, i un altre per a una caseta on es guardin les eines de manteniment —el qual ha de tenir forma quadrada. Per motius estètics, l'arquitecte vol delimitar cadascun d'aquests dos espais amb una barana de forja. Sabent que les dues baranes mesuren exactament 10 m de longitud en total, quina mida ha de tenir la barana de cada espai per tal que la suma de les superfícies dels dos espais sigui la més petita possible? Quina és aquesta superfície mínima?

OPCIÓ B

Considereu els punts de l'espai $P = (1, 0, -1)$, $Q = (3, -2, 0)$ i $R = (1, 1, 1)$.

4.1. Calculeu l'equació del pla que conté els punts P, Q i R.
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1	

4.2. Comproveu que l'àrea del triangle ΔPQR és $\frac{3\sqrt{5}}{2}u^2$.
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 4.2	

4.3. Determineu les condicions que han de complir les coordenades d'un quart punt $S = (x, y, z)$ per tal que P, Q, R i S formin un tetraedre de volum 1. (El volum del tetraedre format pels punts P, Q, R i S és: $\text{volum}(PQRS) = \frac{\text{àrea}(\Delta PQR) \cdot \text{altura}}{3}$.)
[1 punt]

ació de l'apartat 4.3	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici.]

Comprovació i 2a correcció:

3a correcció:

Etiqueta de l'estudiant

IEC
Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés.

SÈRIE 1

Exercici 1

1.1.

Com que les tres funcions que defineixen f són contínues en els seus respectius intervals de definició, només cal imposar que f sigui contínua als punts de contacte, $x = 0$ i $x = 2$. Tenim

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 5e^{2x} = 5,$$

$$f(0) = 5e^0 = 5,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+m)^2 + 1 = m^2 + 1.$$

Per tant, la funció f és contínua en $x = 0$ si i només si $m^2 + 1 = 5$, cosa que passa si i només si $m = \pm 2$. D'altra banda,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+m)^2 + 1 = (2+m)^2 + 1,$$

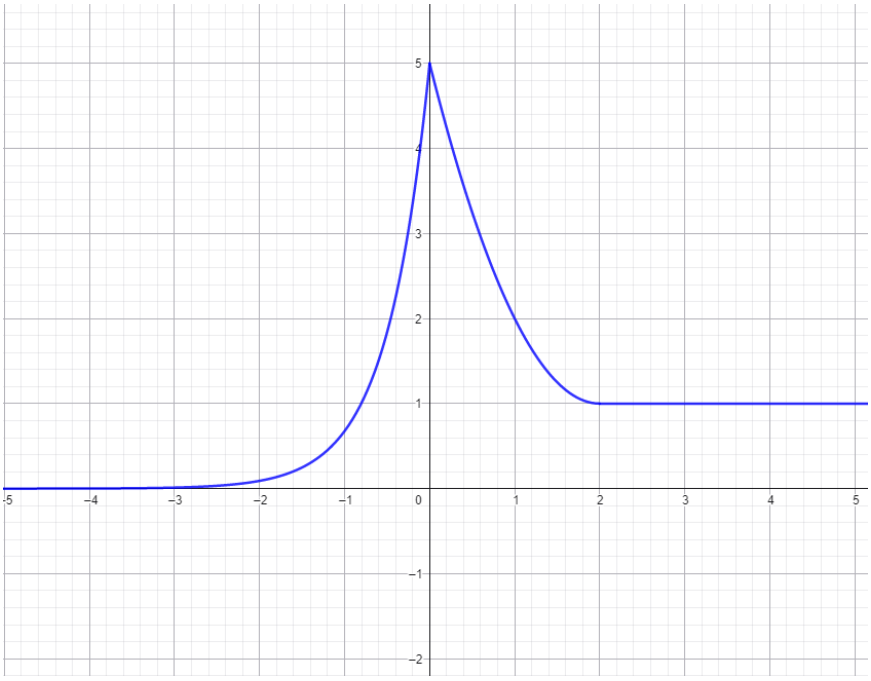
$$f(2) = 1,$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 1 = 1,$$

i la funció f és contínua en $x = 2$ si i només si $(2+m)^2 + 1 = 1$, cosa que passa si i només si $m = -2$. Per tant, la funció és contínua en tots els punts només quan $m = -2$.

1.2.

La gràfica corresponent és:



Per representar la funció quadràtica es pot calcular el vèrtex amb la fórmula $x = \frac{-b}{2a} = 2$ o bé observar que és una translació 2 unitats a la dreta i una unitat amunt de la paràbola $y = x^2$.

És clar, fins i tot sense la gràfica, que la funció és positiva en tot el seu domini. Per tant per calcular l'àrea demanada ens cal calcular la integral definida:

$$A = \int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 5e^{2x}\,dx + \int_{0}^{2} ((x-2)^2 + 1)dx + \int_{2}^{3} 1\,dx =$$

$$= \left[\frac{5}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{(x-2)^3}{3} + x\right]_{0}^{2} + [x]_2^3 = \frac{5}{2} - \frac{5}{2e^2} + 2 + \frac{8}{3} + 3 - 2 \simeq 7{,}83\,u^2.$$

1.3.

Com que el primer tram de la gràfica és creixent, i el tercer és pla, només pot haver-hi punts amb pendent negativa al tram del mig. Volem un punt on el pendent sigui -2, per tant derivem el tram parabòlic i igualem la derivada a -2:

$$2(x-2) = -2 \longrightarrow x = 1.$$

La recta tangent al punt $\big(1, f(1)\big) = (1, 2)$ és

$$y - 2 = -2(x-1) \longrightarrow y = -2x + 4.$$

Pautes de correcció: (**1.1)** Compteu 0,25 punts per justificar que ja és contínua fora dels punts de contacte; 0,25 per estudiar cadascun dels dos contactes, i 0,25 per combinar-ho i donar la resposta final correcta. **(1.2)** Compteu 0,25 per l'esbós de la gràfica; 0,25 pel planteig correcte de l'àrea com a suma d'integrals; 0,25 pel càlcul de la integral de la part exponencial, i 0,25 per la integral de la part parabòlica. **(1.3)** Compteu 0,25 per trobar el punt i 0,25 pel càlcul de l'equació de la recta tangent.

Exercici 2

2.1.

La matriu de coeficients i la matriu ampliada del sistema són:

$$A=\begin{pmatrix}1 & m & 1\\ 1 & 3 & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix} \quad i \quad \bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & m & 1 & 4\\ 1 & 3 & 1 & 5\\ m & 1 & 1 & 4\end{array}\right)$$

Calculant el determinant de la matriu A, tenim

$$\begin{vmatrix}1 & m & 1\\ 1 & 3 & 1\\ m & 1 & 1\end{vmatrix}=3+m^2+1-3m-1-m=m^2-4m+3.$$

Per obtenir els valors crítics, fem

$$|A|=0 \Leftrightarrow m^2-4m+3=0 \Leftrightarrow m=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=3,\ 1.$$

En el cas $m\neq 1,3$, tenim $|A|\neq 0$, $rang(A)=rang(\bar{A})=3$ i, com que hi ha tres incògnites, el sistema és compatible determinat.

En el cas $m=3$, tenim $|A|=0$ i $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}\neq 0$ per tant $rang(A)=2$. Per altra banda,

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=8\neq 0$$

i deduïm que $rang(\bar{A})=3$ i que el sistema és incompatible en aquest cas.

Finalment, en el cas $m=1$, tenim $|A|=0$, $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\neq 0$, $rang(A)=2$, i també $rang(\bar{A})=2$ per tenir la primera i tercera files iguals. En aquest cas, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

2.2.

Es tracta de tres plans a l'espai, que estan en diverses posicions relatives depenent del valor del paràmetre: d'acord amb la discussió de l'apartat anterior, si $m\neq 1,3$, el sistema és compatible determinat, la qual cosa significa que els tres plans es tallen en un únic punt comú. Si $m=3$ és incompatible, cosa que vol dir que no tenen cap punt en comú: això es pot veure directament observant que, en aquest cas, el primer pla, $x+3y+z=4$, i el segon, $x+3y+z=5$, són paral·lels i no coincidents. Finalment, si $m=1$ el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat i els tres plans s'intersequen en una recta comuna. Per trobar-ne l'equació cal resoldre el sistema en aquest cas:

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ x+\ y+z=4 \end{matrix}\right\} \underbrace{\Leftrightarrow}_{F1=F3} \left.\begin{matrix} x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{matrix}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{z=\lambda} \left.\begin{matrix} x+y=4-\lambda \\ x+3y=5-\lambda \end{matrix}\right\},$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 5-\lambda & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{12-3\lambda-5+\lambda}{2}=\frac{7-2\lambda}{2},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-\lambda \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{5-\lambda-4+\lambda}{2}=\frac{1}{2}.$$

La solució del sistema són tots els punts de la forma $\left(\frac{7-2\lambda}{2},\frac{1}{2},\lambda\right)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$. És a dir, la intersecció dels tres plans, en aquest cas, consisteix en la recta d'equació $(x,y,z)=\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2},0\right)+\lambda(-1,0,1)$.

2.3.

Per a $m=1$, el sistema té infinites solucions, una de les quals és $(x,y,z)=\left(3,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, precisament la que correspon a $\lambda=\frac{1}{2}$. Per tant, qualsevol nova equació que també tingui aquest punt com a solució, per exemple $x=3$, i que doni una matriu de coeficients total de rang 3, convertirà el sistema en compatible determinat amb el punt desitjat com a única solució; l'equació proposada ho compleix:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3.$$

Criteris de correcció: (2.1) Compteu 0,25 punts per calcular el determinant i trobar els dos valors crítics, i 0,25 punts per la discussió de cadascun dels tres casos. **(2.2)** Compteu 0,25 punts per cadascuna de les tres interpretacions geomètriques i 0,25 per la resolució del sistema en el cas $m=1$. **(2.3)** Compteu 0,5 punts per donar l'equació demanada i raonar que és vàlida.

Exercici 3

3.1.

Calculem primer la probabilitat que un seguidor del grup aconsegueixi comprar una entrada al web. Considerem els successos:

ES = "Obtenir entrada al sorteig",

W = "Intentar comprar-la al web",

EW = "Aconseguir entrada al web".

A partir de les dades de l'enunciat, tenim que

$$P(ES) = 0{,}16,$$

$$P(W) = (1 - 0{,}16) \cdot 6/7 = 0{,}72,$$

$$P(EW) = P(W) \cdot 0{,}25 = 0{,}18.$$

Per tant, en total el $16 + 18 = 34$ per cent dels seguidors d'aquest grup al municipi aconsegueixen entrada per al concert. Si el 16% dels seguidors corresponen a 24 persones, el 34% correspondran a:

$\frac{24}{16} = \frac{x}{34} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{34} \Rightarrow x = 17 \cdot 3 = 51$ persones.

3.2.

Sigui noE el succés "No tenir entrada per al concert". Ens demanen $P(W|noE)$. Per la llei de Bayes,

$$P(W|noE) = \frac{P(noE|W)P(W)}{P(noE)}.$$

De l'apartat anterior sabem que la probabilitat de tenir entrada és del 34%, per tant $P(noE) = 1 - 0{,}34 = 0{,}66$. Sabem també que $P(W) = 0{,}72$ i $P(noE|W) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Per tant,

$$P(W|noE) = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}72}{0{,}66} \approx 0{,}82.$$

3.3. Tenim la funció polinòmica $S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30\,t + 90$, a l'interval $t \in [0, 5]$; òbviament és contínua, per ser polinòmica. L'enunciat ens demana si en algun moment $S(t)$ valdrà 100, és a dir,

$$-t^3 + 12t^2 - 30\,t + 90 = 100.$$

Si considerem la nova funció $D(t) = S(t) - 100$, el problema es transforma en saber si $D(t) = 0$ en algun moment $t \in [0,5]$. Com que D també és contínua, i tenim que

$$D(0) = -10 < 0 \quad \text{i} \quad D(5) = 15 > 0,$$

es compleixen les hipòtesis del teorema de Bolzano i, per tant, es pot afirmar que existeix un punt $c \in (0,5)$ tal que $D(c) = 0$. Aproximem-lo amb una dècima de precisió:

$$D(2) = -30 < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (2,5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4) = -2 < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (4,5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'5) = 6'85 > 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (4,4'5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'2) = 1'592 > 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (4,4'2) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'1) = -0'201 < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (4'1,4'2) \text{ tal que } D(c) = 0.$$

Així doncs, els llums de la sala s'activaran aproximadament al cap de 4,1 minuts d'haver començat a sonar la cançó més famosa del grup.

Criteris de correcció: (3.1) Compteu 0,5 punts per calcular el percentatge de seguidors que obtenen entrada, i 0,25 punts pel nombre de persones que això representa. **(3.2)** Compteu 0,25 punts pel planteig del problema i 0,5 pel càlcul de la probabilitat demanada. **(3.3)** Compteu 0,25 punts pel planteig del problema i per comentar la continuïtat de la funció; 0,5 per la primera aplicació del teorema de Bolzano correctament raonada, i 0,25 punts per l'aproximació fins a una dècima.

Exercici 4

OPCIÓ A.

Anomenem x a la longitud en metres del primer tros de barana, amb el qual es farà el tancat circular; de l'altre tros, de $10 - x$ metres de longitud, se'n farà el tancat quadrat. Com que x ha de ser el perímetre d'una circumferència, el seu radi serà $r = \frac{x}{2\pi}$, i l'àrea d'aquest espai circular delimitat valdrà $A_1 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$. Per altra banda, com que $10 - x$ és el perímetre d'un quadrat, el seu costat serà $c = \frac{10-x}{4}$ i l'àrea d'aquest espai quadrat valdrà $A_2 = \left(\frac{10-x}{4}\right)^2$. Així la funció a minimitzar és

$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{100 - 20x + x^2}{16} = \frac{(4+\pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi}{16\pi}.$$

Derivem i busquem els punts crítics

$$A'(x) = \frac{(8+2\pi)x - 20\pi}{16\pi} = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{20\pi}{8+2\pi} \simeq 4{,}4\ m.$$

Per assegurar que es tracta d'un mínim, podem fer la segona derivada i comprovar que és positiva:

$$A''(x) = \frac{8+2\pi}{16\pi} > 0.$$

Així doncs, per tal de minimitzar la superfície total dels dos espais, l'arquitecte d'aquest poble haurà de fer un tancat circular amb $4{,}4\ m$ de barana i un tancat quadrat amb els $5{,}6\ m$ restants. La superfície total dels dos tancats serà de

$$A(4{,}4) = \frac{(4+\pi)\cdot 4{,}4^2 - 20\pi \cdot 4{,}4 + 100\pi}{16\pi} \simeq 3{,}5\ m^2.$$

Criteris de correcció: Compteu 0,25 punts per plantejar el perímetre de la circumferència; 0,25 punts pel perímetre del quadrat, i 0,5 punts per l'expressió de l'àrea total en funció d'una sola variable. Compteu 0,5 punts per la derivada i obtenció del punt crític; 0,5 per comprovar que es tracta d'un mínim, i 0,5 per la resposta final, incloent-hi les dues longituds i el valor de l'àrea mínima.

OPCIÓ B.

4.1.

Comencem trobant els vectors $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, 1)$ i $\overrightarrow{PR} = (0, 1, 2)$. El vector normal al pla buscat és

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4i + 2k - i - 4j = (-5, -4, 2).$$

Així doncs el pla buscat té equació de la forma $5x + 4y - 2z + D = 0$. Substituint les coordenades del punt R a l'equació anterior deduïm $D = -7$ i, per tant, l'equació buscada és

$$\pi\colon\ 5x + 4y - 2z - 7 = 0.$$

4.2.

i pensem el triangle ΔPQR amb base PQ, aquesta mesura

$$d(P, Q) = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-0)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Per altra banda, la recta $\overline{PQ}$ té equació

$$(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(2, -2, 1) = (1 + 2\lambda, -2\lambda, -1 + \lambda),$$

i vector director $(2, -2, 1)$. Per tant, el pla perpendicular que passa per R té equació de la forma $2x - 2y + z + D = 0$, amb $2 - 2 + 1 + D = 0 \longrightarrow D = -1$. I la projecció de R sobre la recta $\overline{PQ}$ serà la intersecció del pla $2x - 2y + z - 1 = 0$ amb la recta $\overline{PQ}$, és a dir

$$2(1 + 2\lambda) - 2(-2\lambda) + (-1 + \lambda) - 1 = 0 \longrightarrow 9\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = 0,$$

és el punt $(1,0,-1)$ (és casualitat que sigui P; això vol dir que l'angle $\widehat{RPQ}$ és recte). Així l'àrea del triangle ΔPQR és

$$\text{Àrea}(PQR) = \frac{base \cdot\ alçada}{2} = \frac{d(P,Q) \cdot d(P,R)}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1+1)^2}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}\ u^2.$$

Alternativament, també podem calcular l'àrea més ràpidament, aprofitant el producte vectorial de l'apartat anterior i la fórmula

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{45} = \frac{3}{2}\sqrt{5}\,u^2.$$

4.3.

El volum del tetraedre determinat pels punts P, Q, R, S és

$$Volum(PQRS) = \frac{\text{Àrea}(PQR) \cdot \text{ alçada}}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot d(S, \pi)}{3}.$$

Com que la distància del punt $S = (x, y, z)$ al pla $\pi: 5x + 4y - 2z - 7 = 0$ és

$$d(S, \pi) = \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{5^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{45}},$$

el lloc geomètric dels punts S tals que el tetraedre format per P, Q, R, S tingui volum 1 ve donat per

$$\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{3\sqrt{5}}}{3} = 1,$$

$$5x + 4y - 2z - 7 = \pm 6,$$

és a dir, són dos plans paral·lels al pla π, d'equacions

$5x + 4y - 2z - 1 = 0$, $\quad i \quad$ $5x + 4y - 2z - 13 = 0$.

Criteris de correcció: (4.1) Compteu 0,75 punts pel càlcul de l'equació correcta del pla. **(4.2)** Compteu 0,5 punts pel càlcul de la base i l'alçada del triangle, i 0,25 per l'àrea. **(4.3)** Compteu 0,5 punts pel planteig i desenvolupament del problema; 0,25 per tractar correctament el valor absolut i 0,25 per les equacions dels dos plans finals.