Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2026

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 2

Indiqueu l'opció triada:

Exercici 4: Opció A ☐ Opció B ☐

Espai per a la correcció

Qualificació	
Exercici 1	
Exercici 2	
Exercici 3	
Exercici 4	
Suma de notes parcials	
Qualificació final	

Espai per a la revisió

Comprovació	2a correcció

Etiqueta de qualificació

Etiqueta de correcció

Etiqueta de l'estudiant

Ubicació del tribunal .....

Número del tribunal .....

L'examen consta de QUATRE exercicis obligatoris. Cada exercici val 2,5 punts. Feu els exercicis 1, 2 i 3 responent a TOTES les qüestions que s'hi plantegen. A l'exercici 4, trieu UNA de les dues opcions (A o B) proposades i indiqueu-la a la portada.

En totes les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què. Cal que la redacció de la resposta es faci de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc del final del quadern per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de l'exercici corresponent.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Exercici 1

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 1	

Considereu la funció $f(x)=\dfrac{5x}{x^2+1}$.

1.1. Estudieu-ne el domini i els intervals de creixement i decreixement, així com els possibles màxims i mínims locals.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.1	

1.2. Calculeu les equacions de totes les asímptotes d'aquesta funció (si en té) i dibuixeu un esbós de la seva gràfica.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 1.2	

1.3. Calculeu l'equació de la recta normal (és a dir, la recta perpendicular a la tangent) a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 1.3	

Exercici 2

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 2	

Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} 2x+ky+z&=3\\ -x+2y+2z&=1\\ x+y+z&=2 \end{aligned}\right\},$$

on k és un paràmetre real.

2.1. Discutiu el sistema en funció del paràmetre k.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.1	

2.2. Resoleu el sistema per a tots els valors de k i comproveu que, per a $k \neq 1$, la solució no depèn de k.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.2	

2.3. Interpreteu geomètricament el resultat dels apartats anteriors.

[0,5 punts]

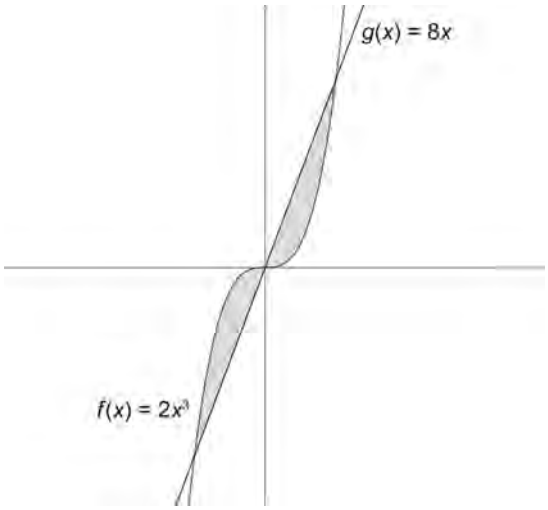
Puntuació de l'apartat 2.3	

Exercici 3

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 3	

Es vol construir un parc eòlic al Solsonès format per 10 aerogeneradors. L'empresa que els construirà està dissenyant les pales segons l'esquema següent, on x i $f(x)$ estan mesurats en metres (el dibuix no està a escala):



S'ha calculat que cadascun dels 10 aerogeneradors tindrà una potència de 100 MW. Degut a diversos factors, cadascun té una probabilitat del 10 % d'estar aturat, independentment de la resta d'aerogeneradors.

3.1. Quina és la probabilitat que s'arribi als 1 000 MW de potència total al parc?

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.1	

3.2. Quina és la probabilitat que la potència total del parc superi els 150 MW?

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.2	

3.3. Calculeu l'àrea de les pales d'un d'aquests aerogeneradors (part ombrejada al gràfic).
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 3.3	

Exercici 4
[2,5 punts en total]

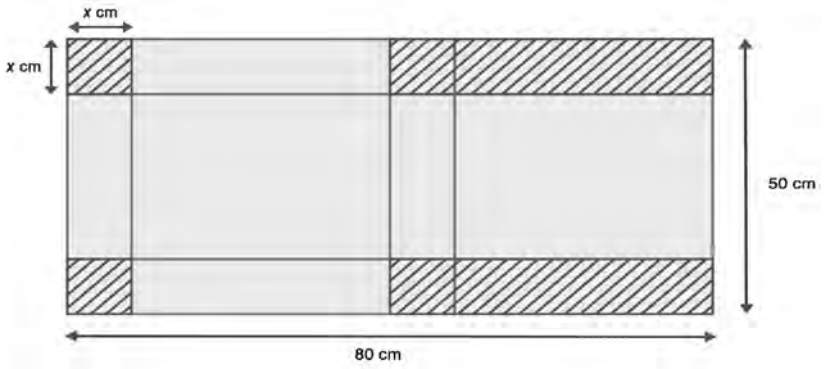
Puntuació total de l'exercici 4	

L'Aina vol construir una capsa de cartró amb forma de prisma rectangular amb tapa, per guardar-hi la tauleta i el carregador.

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ A

L'Aina construirà la capsa a partir d'un cartró rectangular de 80 cm × 50 cm. A la figura següent es mostra el desplegament de la capsa; les zones ratllades són les parts que l'Aina retallarà i retirarà per tal de poder-la muntar:



4.1. Comproveu que el volum de la capsa resultant és $V(x) = 2x^3 - 130x^2 + 2\,000x$, on x és la longitud del costat del quadrat que cal retallar dels cantons per a poder-la muntar.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.1	

4.2. Calculeu les dimensions de la capsa per tal que el seu volum sigui màxim. Quin és aquest volum màxim?
[1,5 punts]

Puntuació de l'apartat 4.2	

OPCIÓ B

L'Aina vol fer un croquis en 3D de la capsa utilitzant un programa informàtic. Per a començar, situa un costat de la tapa des del vèrtex $A(1, 1, 1)$ fins al vèrtex $B(4, 1, 5)$, i l'altre costat de la tapa des del vèrtex A fins al vèrtex $C(1, 10, 1)$.

4.1. Quines són les coordenades del quart vèrtex de la tapa? Calculeu les longituds dels dos costats de la tapa.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.1	

4.2. Sabent que els altres quatre vèrtexs de la capsa estan situats al pla $\pi: -4x + 3z = 24$, calculeu les coordenades d'un d'aquests vèrtexs (qualsevol) i l'alçària de la capsa.
[1,5 punts]

Puntuació de l'apartat 4.2	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici.]

Comprovació i 2a correcció:

3a correcció:

Etiqueta de l'estudiant

IEC
Institut d'Estudis
Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés.

SÈRIE 2

Exercici 1

[2,5 punts en total]

1.1

El domini d'aquesta funció són tots els nombres reals, ja que el denominador no s'anul·la mai. La derivada és

$$f'(x) = \frac{5(x^2+1)-5x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-5x^2+5}{(x^2+1)^2}.$$

Els candidats a màxim i mínim d'aquesta funció són els zeros de la derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -5x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Per tant, els únics possibles màxims o mínims són aquests dos punts. Ara estudiem la monotonia de la funció, mirant el signe de la derivada: el denominador és sempre positiu i el numerador, $-5x^2 + 5$, és negatiu a $(-\infty, -1)$ i a $(1, +\infty)$, mentre que és positiu a $(-1, 1)$. Per tant, $f'(x) < 0$ i la funció f és decreixent a $(-\infty, -1)$ i a $(1, +\infty)$, mentre que $f'(x) > 0$ i la funció f és creixent a l'interval $(-1,1)$. Per tant, la funció té un màxim a $x = 1$ i un mínim a $x = -1$.

1.2

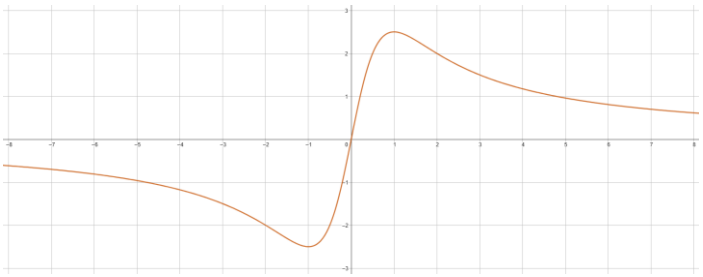
La funció no tindrà asímptotes verticals perquè el denominador mai s'anul·la. Sí que té asímptotes horitzontals, ja que $f(x) \to 0$ quan $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5/x}{1+1/x^2} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Alternativament, també es pot argumentar per la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{2x} = \frac{5}{\pm\infty} = 0.$$

Amb la informació que tenim podem fer un esbós de la gràfica de la funció f:



1.3

Com que $f(2) = \frac{5 \cdot 2}{2^2+1} = \frac{10}{5} = 2$, es tracta del punt $(2, 2)$. El pendent en aquest punt és $f'(2) = \frac{-5 \cdot 2^2+5}{(2^2+1)^2} = \frac{-15}{25} = -\frac{3}{5}$, per tant, la recta normal, que és perpendicular a la tangent, tindrà pendent $\frac{5}{3}$ i es tracta de

$$y - 2 = \frac{5}{3}(x - 2) \longrightarrow y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}.$$

Exercici 2

[2,5 punts en total]

2.1

Considerem la matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada del sistema, A^*,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculant el determinant de la matriu A, tenim

$$|A| = 4 - 1 + 2k - 2 - 4 + k = 3k - 3,$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 3k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Per tant, si $k \neq 1$, $rang(A) = 3$ i $rang(A^*) = 3$ i, pel teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible determinat perquè té 3 incògnites.

D'altra banda, si $k = 1$, $|A| = 0$ i, com que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, deduïm que $rang(A) = 2$. Per a estudiar el rang de la matriu A^* veiem que

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 + 1 - 6 - 2 + 2 = 0$$

i, pel mètode de l'orlat, $rang(A^*) = 2$. Com que $rang(A) = rang(A^*) = 2 < número\ d'incògnites$, el teorema de Rouché-Frobenius ens assegura que el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

2.2

En l'apartat anterior hem vist que, per $k = 1$, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Per obtenir la seva solució en aquest cas, sumant la segona i tercera equacions, obtenim $y = 1 - z$ i, substituint a la tercera, $x = 1$. Per tant, la solució en aquest cas és $(x, y, z) = (1, 1 - z, z)$.

En l'apartat anterior hem vist que per a $k \neq 1$, el sistema és compatible determinat; és a dir, que té una solució única (que, en principi, depèn de k). Per a resoldre'l, fem servir el mètode de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & k & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3k - 3} = \frac{6 + 1 + 4k - 4 - 6 - k}{3k - 3} = \frac{3k - 3}{3k - 3} = 1,$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3k-3} = \frac{2-2+6-1-8+3}{3k-3} = 0.$$

Per a calcular z podem continuar amb Cramer o fer servir una de les equacions:

$z = 2 - x - y = 2 - 1 - 0 = 1.$

Per tant, la solució del sistema per a $k \neq 1$ és el punt $(x, y, z) = (1, 0, 1)$. Efectivament, tal com indica l'enunciat, aquest punt solució NO depèn del valor de k.

2.3

Geomètricament, cadascuna de les equacions del sistema representa un pla a l'espai. Els plans que corresponen a la segona i tercera equacions estan fixos i es tallen en una recta r (són equacions independents). En canvi, el primer pla varia en funció del valor de k. Quan $k = 1$, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat, la qual cosa significa que els tres plans es tallen en una recta; forçosament, ha de ser la recta r, que estarà, per tant, continguda també dins el primer pla. En canvi, quan $k \neq 1$, el sistema és compatible determinat i els tres plans es tallen només en un sol punt, que és $(1,0,1)$; com que aquest punt no depèn de k, el primer pla varia en funció de k, però contenint sempre el punt $(1,0,1)$ —que també ha d'estar dins la recta r, ja que $(1,0,1)$ també és solució del sistema per a $k = 1$.

Exercici 3

[2,5 punts en total]

3.1

Anomenarem X el nombre d'aerogeneradors en funcionament. Per a arribar als 1 000 MW, han de funcionar necessàriament els 10 aerogeneradors. Com que cadascun funciona, independentment dels altres, amb probabilitat $1 - 0{,}1 = 0{,}9$, la probabilitat que això passi és

$$P = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot \cdots \cdot 0{,}9 = 0{,}9^{10} = 0{,}3486\ldots$$

També podem argumentar que el nombre de generadors en funcionament segueix una distribució binomial $X \sim B(n = 10, p = 0{,}9)$ i arribem al mateix resultat.

3.2

Per tal de superar els 150 MW, el nombre d'aerogeneradors funcionant X ha de ser almenys $X \geq 2$. Això és el contrari del fet que en funcioni només un o cap i, per tant, la probabilitat és

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}1^{10} - 10 \cdot (0{,}1)^9 \cdot (1 - 0{,}1)$$
$$= 1 - 0{,}0000000091 = 0{,}9999999909.$$

Per a calcular $P(X = 1)$ podem, o bé argumentar amb la binomial, o bé raonar directament que hem d'escollir un dels deu generadors i imposar que aquest un funcioni i que els altres nou estiguin aturats.

3.3

Per a calcular l'àrea d'una pala, primer trobem els punts de tall entre les dues corbes:

$$2x^3 = 8x \implies 2x^3 - 8x = 0 \implies x(2x^2 - 8) = 0.$$

Obtenim les tres solucions $x = -2, 0, 2$. Per a calcular l'àrea, hem de fer les dues integrals següents (o comprovar que les funcions són antisimètriques i fer només una integral):

$$\int_{-2}^{0} (2x^3 - 8x)dx + \int_{0}^{2} (8x - 2x^3)dx = \left[\frac{x^4}{2} - 4x^2\right]_{-2}^{0} + \left[4x^2 - \frac{x^4}{2}\right]_{0}^{2} =$$

$$= 0 - \frac{(-2)^4}{2} + 4(-2)^2 + 4 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{2} - 0 = 16\, m^2.$$

Per tant, l'àrea de cada pala és de 16 metres quadrats.

Exercici 4

[2,5 punts en total]

OPCIÓ A

4.1

Per a saber l'expressió del volum, necessitem primer les dimensions de la caixa. Observant l'esquema de l'enunciat veiem que la base de la caixa serà un rectangle de llargada $\frac{80-2x}{2}$, és a dir, de $40-x$, i d'amplada $50-2x$. Com que la caixa ens quedarà d'alçada x, el seu volum expressat en centímetres cúbics serà

$$V(x) = (40-x)\cdot(50-2x)\cdot x = 2x^3 - 130x^2 + 2000x,$$

tal com indica l'enunciat.

4.2

Per a optimitzar el volum, calculem els extrems relatius d'aquesta funció, igualant la seva derivada a zero:

$$V'(x) = 6x^2 - 260x + 2000 = 0,$$

$$x = \frac{260 \pm \sqrt{67.600 - 48.000}}{12} = \frac{260 \pm 140}{12} = 10, \quad \frac{100}{3}.$$

Calculem la segona derivada per a determinar el màxim $V''(x) = 12x - 260$. Com que $V''(10) < 0$ i $V''\left(\frac{100}{3}\right) > 0$, el màxim es troba en $x = 10\ cm$. Això correspon a una caixa de $40 - 10 = 30\ cm$ de llargada, per $50 - 20 = 30\ cm$ d'amplada i $10\ cm$ d'alçada, i que té volum $V(10) = 30 \cdot 30 \cdot 10 = 9.000\ cm^3$.

OPCIÓ B

4.1

Podem trobar el quart vèrtex de la tapa, D, de diverses maneres. Per exemple:

$$D = B + \overrightarrow{AC} = (4,1,5) + (0,9,0) = (4,10,5).$$

La tapa és un rectangle. La llargada serà la distància entre el punt A i el punt B:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5\ u.$$

I l'amplada serà la distància entre el punt A i el punt C:

$$d(A,C) = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + 9^2 + 0^2} = 9\ u.$$

L'Aina ha fet el croquis d'una caixa rectangular amb dos costats de 5 i 9 unitats, respectivament.

4.2

Sabem que el pla inferior π, paral·lel al pla de la tapa, té per equació $-4x + 3z = 24$. Per tant, l'alçada de la caixa és la distància de qualsevol dels punts de la tapa, per exemple el punt A, al pla π

$$d(A,\pi) = \frac{|-4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 24|}{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{|-25|}{5} = 5\ u.$$

Per tant, la caixa mesura 5 unitats d'alçada. Per a calcular el vèrtex sota del punt A, només hem de projectar A perpendicularment al pla π: la recta perpendicular a π passant per A és

$$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(-4,0,3).$$

Per tant, la projecció A' del punt A al pla π serà la intersecció d'aquesta recta amb el pla π:

$$-4(1 - 4\lambda) + 3(1 + 3\lambda) = 24 \ \rightarrow \ 25\lambda - 1 = 24 \ \rightarrow \ \lambda = 1.$$

Es tracta, doncs, del punt $A' = (1,1,1) + (-4,0,3) = (-3,1,4)$.